Mécanique des fluides compressibles

Exercice 2.1

Un cylindre fermé par un piston mobile contient de l'air dans les conditions p_1 = 100 kPa et T_1 = 300K. Ce gaz est comprimé vers une pression finale de 500 kPa selon plusieurs transformations. On suppose que l'air est un gaz calorifiquement parfait (chaleurs spécifiques constantes), avec c_p = 1'003.5 J/kg.K, c_v = 716.5 J/kg.K, r = 287 J/kg.K.

Pour chacune de ces transformations, tracer (si possible) le parcours sur un diagramme $p-v$ et sur un diagramme $T-s$, en y indiquant (si possible) la transmission de travail et chaleur.

1) La première transformation est une compression quasi-statique et adiabatique. Déterminer les variables d'état T_2 et v_2, ainsi que le travail fourni et la variation d'entropie.

2) Dans la deuxième transformation, le même état final (T_2 et v_2) de la question précédente est atteint par deux transformations quasi-statiques successives (avec transmission de chaleur) : une transformation isovolumique vers la pression finale (500 kPa), suivie d'une transformation isobare vers la température finale. Trouver le travail et la chaleur fournis ainsi que la variation d'entropie (<u>pour chaque étape</u> ainsi que <u>pour la transformation globale</u>).

3) Dans la troisième transformation, le même état final (T_2 et v_2) des questions précédentes est atteint par deux transformations quasi-statiques successives (avec transmission de chaleur) : une transformation isobare vers le volume final v_2, suivie d'une transformation isovolumique vers la pression finale (500 kPa). Trouver le travail et la chaleur fournis ainsi que la variation d'entropie (<u>pour chaque étape</u> ainsi que pour <u>la transformation globale</u>).

4) Dans la quatrième transformation, le même état final (T_2 et v_2) des questions précédentes est atteint par deux transformations quasi-statiques successives (avec transmission de chaleur) : une transformation isotherme vers le volume final v_2, suivie d'une transformation isovolumique vers la pression finale (500 kPa). Trouver le travail et la chaleur fournis ainsi que la variation d'entropie (<u>pour chaque étape</u> ainsi que pour <u>la transformation globale</u>).

5) Dans la cinquième transformation, le même état final (T_2 et v_2) des questions précédentes est atteint par deux transformations quasi-statiques successives (avec transmission de chaleur) : une transformation isovolumique vers la température finale, suivie d'une transformation isotherme vers la pression finale (500 kPa). Trouver le travail et la chaleur fournis ainsi que la variation d'entropie (<u>pour chaque étape</u> ainsi que pour <u>la transformation globale</u>).

6) Dans la sixème transformation, une pression <u>extérieure</u> de 500 kPa est instantanément appliquée au piston (on suppose que la transformation est si rapide qu'il n'y a aucune transmission de chaleur). Déterminer l'état du gaz (T_3,v_3) à l'issue de la transformation, ainsi que le travail fourni et la variation d'entropie (d'où vient-elle ?).

7) Pour l'exercice précédent, est-il possible d'atteindre le même état (T_3,v_3) par une transformation isentropique ?

8) On effectue une transformation polytropique, selon laquelle on a $pv^k = const$. Trouver ce k afin d'atteindre l'état (T_3,v_3), et évaluer les transmissions de travail et de chaleur, ainsi que les variations d'entropie.

Exercices facultatifs

Exercice 2.2

Quand on inspire une bouffée d'hélium (de ballons de baudruche), le timbre de notre voix change (et devient similaire à celui de Donald Duck). Expliquer pourquoi. (Conseil : renseignez-vous sur les principes de production de sons dans le larynx et méfiez-vous des réponses sur le web)

Exercice 2.3

L'équation pour la vitesse du son dans un fluide est par définition :

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$$

Cette relation n'est pas pratique car les transformations isentropes ne sont généralement pas tabulées. Ainsi, expérimentalement, on passe par la relation trouvée en classe pour un gaz parfait (mais valable également pour un fluide quelconque):

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T$$

car les transformations isothermes sont, elles, assez communes. Par contre, la connaissance du rapport des chaleurs spécifiques γ est nécessaire.

(OPTIONNEL/DIFFICILE : Montrer que cette dernière relation est vraie quel que soit le type fluide, et pas nécessairement un gaz parfait)

a. Montrer que pour toute substance :

$$c_p - c_v = -T\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p^2$$

Suggestion : utiliser les résultats du cours (Chapitre 2) ainsi que l'identité suivante

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v = -1$$

b. Montrer ainsi que :

$$c_p - c_v = -vT\frac{\kappa^2}{\alpha_T}$$

où α_T est la compressiblité isotherme (variation du volume en fonction de la pression à température constante, selon la définition donnée en classe) et κ le coefficient d'expansion thermique (variation du volume en fonction de la température à pression constante):

$$\kappa = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

c. Montrer que la vitesse du son peut s'exprimer comme :

$$a = \sqrt{-\frac{\gamma}{\rho \alpha_T}}$$

d. Vérifier que pour un gaz parfait :

$$c_p - c_v = r$$
$$a = \sqrt{\gamma r T}$$

e. Les valeurs de α_T et κ pour différentes substances (liquides) sont données dans le tableau suivant. Pour chacune des substances trouver la différence $c_p - c_v$ et en déduire la valeur du rapport des chaleurs spécifiques γ. Commenter par rapport à la croyance populaire selon laquelle γ est proche de l'unité pour les liquides.

f. Evaluer la vitesse du son dans chacune de ces substances.

	$T\left[K\right]$	$\rho/10^3\left[kg/m^3\right]$	$\alpha_T/10^{-6}\left[atm^{-1}\right]$	$\kappa/10^{-4}\left[K^{-1}\right]$	$c_p\left[kJ/kg.K\right]$
Eau	293	0.998	- 49.6	2.1	4.179
Benzène	293	0.879	- 92.1	12.4	1.72
Mercure	293	13.55	- 3.87	1.82	0.139
Ethanol	293	0.789	- 76.8	11.2	2.44

g. Pour les liquides, il existe plusieurs équations d'état. Une équation populaire est l'équation de Tait donnée par :

$$\frac{p+B}{B} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k$$

qui est réminiscente de l'équation pour une transformation isentrope pour un gaz. Le paramètre B est une fonction de l'entropie, mais est généralement pris comme constant (égal à 3'000 atm pour l'eau). L'exposant k est égal à 7.15 pour l'eau, tandis que ρ_0 est la masse volumique du liquide à des conditions ordinaires. Evaluer une expression pour la vitesse du son, et donner la valeur numérique pour l'eau.